

Artículo científico, puntos de vista, revisión

## Modelo Aritmético de las Administradoras de Fondos de Pensiones

Dr. Dagoberto Acosta Iglesias\* , Dr. Marcelo Vicente Luna Murillo , MSc. Eberto Tuniesky Gutiérrez De León

Universidad Estatal Amazónica, Ecuador.

Recepción: 30/04/2025

Aceptación: 19/05/2026

Publicación: 01/06/2026

**Correspondencia:** dagoailyn@yahoo.es

### Resumen

Las administradoras de fondos de pensiones, surgidas a mediados del siglo XIX en los Estados Unidos, que durante poco más de un siglo mantuvieron el proceso de flujo de capitales de los aportantes y las jubilaciones, han comenzado en las últimas décadas un proceso de estancamiento en el crecimiento de los fondos, generando las consecuencias para los asegurados que se derivan de la reducción de los valores. Las causas atribuibles a la inadecuada gestión del proceso financiero, no serán objeto de atención en este trabajo, la atención se centra específicamente en la estructura del propio proceso, es decir, si las relaciones que lo determinan, por si solas son consistentes, o garantizan que el proceso no colapse, atendiendo a dos características fundamentales: en el proceso, la fracción que se devenga como pensión es superior a la que se aporta mientras se trabaja; y el flujo de entrada de contribuyentes y salida de otros a la fase de pensionados, tiende a estabilizarse. Un modelo de función describe el monto de caja dependiente de los años en que solo hay contribuyentes y de los que transcurren a partir de que comienzan a devengar pensiones, incorporando sucesivamente cada variable implicada y en una hoja de cálculo Excel se determina a partir de la solución del modelo, el tiempo expresado en años, en que colapsan los fondos.

**Palabras clave:** Flujo. Capitales. Asegurados. Proceso. Financiero.

### Abstract

The pension fund administrator, which emerged in the mid-19th century in the United States and maintained the capital flow process for contributors and retirees for just over a century, have begun to experience stagnation in fund growth in recent decades, resulting in reduced values for policyholders. The causes attributable to inadequate financial management will not be addressed in this paper. Attention will focus specifically on the structure of the process itself, i.e., whether the relationships that determine it are consistent on their own or guarantee that the process will not collapse, taking into account two fundamental characteristics: in the process, the fraction that accrues as a pension is greater than the amount contributed while working, and the inflow of contributors and outflow of retirees tends to stabilize, the model is represented in average variables for the characteristics considered throughout the entire process. A function model describes the amount of cash dependent on the years in which there are only contributors and those that elapse from the time they begin to accrue pensions, successively incorporating each variable involved and, in the Excel spreadsheet, the time expressed in years in which the funds collapse is determined from the solution of the model.

**Keywords:** Flow. Capital. Insured. Process. Financials.

## Introducción

La interrogante acerca de que un proceso de flujo de dinero se quede sin fondos, se puede analizar elaborando un modelo cuantitativo en términos de una función dependiente de los principales valores financieros que representan las distintas características del proceso de flujo de dinero en una entidad financiera, que permitan, según la relación obtenida, calcular el monto de caja en períodos de tiempo determinados, precisando si es que ocurre, en qué momento no se dispone de dinero suficiente para cumplir con las obligaciones financieras de esta. Se obtiene una función con variable de salida o dependiente que calcula el monto de caja en períodos de un año, a partir de relacionar variables como: flujos de entrada de contribuyentes, salida de trabajadores a estatus de pensionados, salario medio mensual de todos los aportantes, cantidad inicial de aportantes, cantidad de años transcurridos hasta que empiezan a considerarse personas jubiladas, fracción del salario que se aporta, fracción de cobro de pensiones respecto a la cantidad abonada, etc. El modelo facilita considerando los valores de las diferentes variables en un rango adecuado, es decir, valores que ocurren en realidad, conocer hasta qué tiempo el flujo de caja aumenta y posteriormente comienza la disminución de fondos, hasta el punto o año en que definitivamente se queda sin fondos y colapsa.

Los primeros procesos de flujo de dinero con un esquema del tipo flujo de caja el cual podríamos considerar que es igual a Capital inicial como inversión + Aportaciones de nuevos afiliados – Pago por Jubilación de los antiguos aportantes, se reportan de forma masiva en los Estados Unidos, con la creación de las Administradoras de Fondos de Pensiones (AFP), las pensiones provienen del ahorro (consumo presente para el futuro) que se realiza en la vida laboral activa. Sin embargo, la población no es consciente de los riesgos a los que se expone ante una eventual falta de ahorro para la vejez, (Ebbinghaus, B., 2021)

La primera referencia histórica a un fondo de inversión se encuentra en el siglo XVII, en los Países Bajos, donde más tarde se fundó la famosa “Administratis Kantooren”, con el objetivo de proporcionar una provisión pública para la adquisición parcial de una serie de acciones que con su alto valor o escasez, no estaban al alcance del ahorrador medio y del pequeño ahorrador; y el primer mercado de valores en Bélgica surgió en Amberes, y la primera acción conjunta es promovida por la Compañía Holandesa de las Indias Orientales a principios del siglo XVIII; realizar inversiones en acciones o materias primas, era común en toda Europa al margen de la forma en que se originaban las burbujas, manifestándose una

burbuja como el punto en el que el precio de una acción es mucho más elevado que su valor. (Teague, FN, 2022)

Una marcada característica según las afirmaciones anteriores de los procesos financieros referidos en Europa en los siglos XVII y XVIII, es la inaccesibilidad del común de las personas, por el elevado valor de la participación. En términos de las Administradoras de fondos para la jubilación, el análogo puede estar en que la inversión para una jubilación futura no garantiza una pensión que se ajuste adecuadamente a las exigencias de los costos para cubrir las necesidades básicas en la tercera edad. Esta cuestión puede estar dada porque las aportaciones y el consecuente crecimiento de los fondos de las administradoras, no sea suficiente para cubrir tales exigencias.

Los valores los custodiaban la sociedad mencionada, por lo que esta emitía un certificado de depósito otorgando al portador el derecho pertinente a los títulos depositados. Por su aparente éxito se produjo su rápida expansión a Gran Bretaña, Bélgica y luego a toda Europa. Para finales del siglo XIX los fondos llegan a Estados Unidos de América, donde en unos pocos años se convierten en su principal mercado, no sólo por la cantidad de fondos, sino también por la cantidad de activos manejados. (Palma, N., 2021)

En algunos países de América latina las administradoras de fondos nacerían para reemplazar la existente administración estatal, reemplazándola por una administración privada para que el estado se limite a establecer las normas y su control, y a la ayuda asistencial en casos específicos.

Aún no existe una marcada tendencia hacia el ahorro de parte de la población latinoamericana, dado quizás porque las administradoras de fondos de inversión se prestan como un objeto social cuyo objetivo principal es el de administrar fondos de inversión y brindarle el mejor servicio a sus aportantes, y por los esquemas fraudulentos de crecimiento del dinero dados en España en los años setenta del siglo XIX, también en EE.UU en los años veinte del siglo XX y otros, continuando hasta el presente (Mayorga Zambrano, J. 2011)

Las características de las AFP es de ofrecer tasas rendimiento de jubilación varias veces superiores a la tasa de aportaciones, ligado a la tendencia a largo plazo a homogenizar el flujo de entrada de nuevos aportantes con el de trabajadores que pasan a la jubilación; diferente para los esquemas piramidales engañosos, que ofrecen ganancias o tasas de rendimiento financiero irrealizables, que se sustentan inicialmente en los aportes de los nuevos contribuyentes, los cuales tienen tasas decrecientes que con

el tiempo puede provocar un colapso del sistema. (Owadally et al. 2021)

La relación en la fracción en valores promedio mensual de dinero aportada durante la etapa laboral de afiliación y dinero de la pensión mensual en el orden, dinero aportado (DA) y dinero pensionado (DP) es menor que uno, es decir,  $\frac{DA}{DP} < 1$ , relación que eviden-

cia de manera simple y directa que probablemente, el monto de los aportes sistemáticos puede ser superado por el monto de la pensión devengada por un pensionado en los primeros diez o doce años del servicio de pensiones.

En este sentido Ebbinghaus, B., (2021) afirma, si bien se ha debatido con suficiente amplitud sobre la sostenibilidad financiera en el tiempo de los sistemas de pensiones, frente al envejecimiento de la población, en el debate actual se ha descuidado en buena medida la suficiencia de los ingresos de jubilación, ... existen variaciones significativas en la satisfacción de las necesidades básicas y la diferencia de ingresos en la tercera edad que merecen atención, dado que las pensiones no son apropiadas para todas las personas mayores en todos los casos.

Por tanto, a este debate es posible aportar un análisis cuantitativo que ilustre la inviabilidad de las AFP a largo plazo, para sostener la suficiencia de los ingresos jubilatorios, pues los costos de vida y el nivel de gastos en bienes y servicios que necesita consumir una persona o los integrantes de un hogar, para conseguir cierto grado de satisfacción o nivel de vida, superan la capacidad de pago de los montos de jubilación.

Los gobiernos están deseando que los individuos elijan el sistema privado de pensiones. han introducido sucesivas modificaciones en los parámetros de los dos sistemas tanto privados como estatales. En 1992, la contribución de un individuo al nuevo sistema privado era de aproximadamente el 13,9 %, mientras que las contribuciones al sistema de reparto eran del 9 % del salario, además, la edad de jubilación en el sistema privado era de 65 años, mientras que la del sistema público era de 60 años, aunque hubo un aumento de la afiliación al sistema privado especialmente entre los trabajadores más jóvenes, más educados y con mayores ingresos (Palacios y Whitehouse, 1999)

Un elemento que refuerza el análisis cuantitativo en favor de la inviabilidad a largo plazo de estos procesos se aprecia en la afirmación de (Marc Artzrouni. 2009), también se distingue un improbable "esquema Ponzi filantrópico" que puede tener algo que ver con la seguridad social. La descripción cuantitativa

aproximada de los flujos de dinero en estos esquemas permite pronosticar un declive de los fondos en el tiempo. Considerando las diferentes fracciones monetarias que forman parte del dinero que constituyen el capital inicial, las aportaciones o las salidas de fondos, consideradas éstas en las variables medias, permiten plantear un modelo aritmético dependiente del tiempo en años, que cuantifica el estado de fondos de la aseguradora, finalizado cada año.

La consideración de la homogenización de los flujos de entrada de contribuyentes y salida de trabajadores a estatus de pensionados puede describirse como normales con media  $d$  y varianza  $\sigma_d^2$  comunes, es decir,  $N(d, \sigma_d^2)$ ; si además se considera el salario medio mensual de todos los aportantes denominándolo  $s$ , puede identificarse con un comportamiento normal de varianza dada, tal como,  $N(S, \sigma_s^2)$ . Otras variables a tener en cuenta son la cantidad inicial de aportantes  $T$ , cantidad de años transcurridos hasta que empiezan a considerarse personas jubiladas  $n$ , la fracción del salario que se aporta para los fondos  $j$ , la fracción de cobro de pensiones respecto a la cantidad abonada como contribuyente  $\alpha$  que puede representar varios múltiplos de la fracción de aportaciones, la fracción de trabajadores que dejan de recibir pensiones  $p$ , la fracción disponible de los fondos aportados destinada a inversiones  $pi$ , la fracción de utilidades de los aportes destinados a inversiones  $pig$ , la fracción del capital inicial que se destina a salario y mantenimiento  $pc$ , la fracción de los aportes que se dedica a salario y mantenimiento  $pa$  y la fracción que representa el monto del capital inicial con respecto a los aportes del primer año  $fa$  que puede ser un múltiplo entero de éste. Estas variables además de la consideración en rangos razonables asociados al uso en el contexto contable, pueden gestionarse en casos extremos para explorar el modelo propuesto.

En el contexto de los modelos, se afirma, por un lado, un marco estructural permite que las reglas de decisión óptimas sean una función de los parámetros de política y todos los datos iniciales, incluida la composición inicial de las pensiones; por lo tanto, un marco de este tipo permite que las reglas de decisión óptimas varíen sistemáticamente con cualquier cambio en la política... más adelante se contraponen el mismo autor, por otro lado, el entorno dinámico de un modelo estructural también permite la sustitución intertemporal, y seguidamente se dice, como resultado, un modelo de este tipo proporciona información adicional sobre las respuestas conductuales a los cambios de política. Este aspecto se vuelve especialmente importante en

presencia de riesgos del ciclo de vida no asegurables. (Bairoliya, N. , 2019)

Con las variables y tasas indicadas antes, se establece una relación funcional que teniendo como variable a explorar, el tiempo en años en que la administradora mantiene un balance positivo de ingresos y egresos, facilitando incluso evaluar el modelo para diferentes tasas de disponibilidad o propósito de los fondos disponibles desde el inicio del proceso.

Siguiendo pautas similares a (Marc Artzrouni. 2009 y Mayorga Zambrano, J. 2011) es posible construir un modelo en una versión aritmética, que explique en términos cuantitativos, la tendencia al colapso del sistema de pensiones; se estima el tiempo en que después que los primeros jubilados comienzan a devengar pensiones, los fondos de la entidad lleguen al punto de decrecimiento cero, además el modelo permite explorar algunas de las condiciones en las que se prolonga el punto en el tiempo de fondos cero.

## Métodos

Sea la variable  $T$  que representa la cantidad de trabajadores que aportan la fracción  $j$  del salario mensual  $S$ , a partir del año uno de creada la administradora durante  $n$  años, proceso que se incrementa en una cantidad  $d$  de trabajadores cada año y los primeros trabajadores aportantes empiezan a devengar la fracción  $\alpha j$  de pensión con  $\alpha > 1$ , durante  $m + 1$  años posteriores a que comienzan a devengar pensiones los primeros trabajadores jubilados, produciéndose entradas y salidas de dinero a la caja; los ingresos de caja serán  $IC$ . Para construir el modelo se seguirá el recurso de considerar los valores o características que se identifican en el proceso y se representan a través de variables que significan montos de dinero y de las tasas asociadas.

### Concepción aritmética del modelo

Se considera que transcurren  $n + m + 1$  años, de estos,  $n$  en que solo se aporta y  $m + 1$  en los que se aporta y se devengan pensiones, el año  $n + 1$  es el primero en que ocurren ambos flujos, los ingresos y egresos se cuantifican por doce meses. Se trata de decidir en cuántos años, con una fracción de pensión dada, el sistema colapsa. Se considera un fondo inicial con el que comienza el proceso, aunque este se incorporará al modelo en la etapa final de conformación, pero teniendo en cuenta el uso e incidencia de este fondo inicial, para los diferentes fines de la entidad.

Los fondos de caja en general se ingresan por la cuantía (meses)(cantidad de aportantes)(salario)

(fracción aportada), que se consideran uniformes, es decir, las variables *cantidad de aportantes*, *salario* y *fracción aportada*, pueden considerarse como las variables medias de los valores reales, que en un proceso concreto de fondos de pensiones, en general se ubican en clases cuantitativas. Se considera un proceso que fluye sin interrupciones los doce meses del año.

$IC(1) = 12TSj$  – total de ingresos a la caja en el año 1.

$IC(2) = 12(T + d)Sj$  - total de ingresos a la caja en el año 2.

...

$IC(n + 1) = 12(nd)Sj$  - total de ingresos a la caja en el año " $n + 1$ ".

Los ingresos a la caja en los primeros  $n + 1$  años denotados por  $IC$ , cuando transcurre el primer año de cobro de pensiones, por tanto, los  $T$  primeros aportantes, ya no lo hacen en el año  $n + 1$  transcurrido.

$$IC(1, \dots, n + 1) = 12TSj + 12(T + d)Sj + \dots + 12(T + (n - 1)d)Sj + 12(nd)Sj = 12 \left( nT + \frac{n(n+1)}{2}d \right) Sj. \quad (1)$$

Salida de caja el primer año de pago de pensiones  $SC$ ,

$$SC(n + 1) = 12TS\alpha j = 12\alpha TSj. \quad (2)$$

La diferencia (1) – (2) representa el monto de caja  $MC(n + 1)$ , finalizado el primer año en que se pagan pensiones.

$$\begin{aligned} MC(n + 1) &= IC(1, \dots, n + 1) - SC(n + 1) \\ &= 12 \left( nT + \frac{n(n + 1)}{2}d \right) Sj - 12\alpha TSj \\ &= 12 \left( (n - \alpha)T + \frac{n(n+1)}{2}d \right) Sj. \end{aligned} \quad (3)$$

Los ingresos en los primeros  $m$  años de pago de pensiones, posteriores al  $n + 1$  año de aportes, se determinan según las consideraciones iniciales, con el supuesto de que la cantidad de nuevos aportantes de cada uno de estos años es igual a los que pasan a devengar pensiones, es decir, en el primero de estos  $m$  años, entran  $d$  contribuyentes y pasan a retiro  $d$  trabajadores, así hasta el año  $m$  y como al iniciar este flujo de entrada y salida de aportantes, había  $nd$  individuos que aportan fondos, éstos se mantienen en las condiciones supuestas durante todo el período considerado, es decir, que los ingresos de esta etapa serán  $ICm$ ,

$$ICm(n + 2, \dots, n + m + 1) = 12nmdSj. \quad (4)$$

Como en cada uno de estos  $m$  años aumenta en  $d$  la cantidad de pensionados, respecto a los  $T$  iniciales, la salida de caja por concepto de pensiones en los

primeros  $m$  años posteriores al año  $n + 1$  de aportes es  $SCm$ ,

$$SCm(n + 2, \dots, n + m + 1) = 12(T + d)S\alpha_j + 12(T + 2d)S\alpha_j + \dots + 12(T + md)S\alpha_j = 12\left(mT + \frac{m(m+1)}{2}d\right)S\alpha_j. \quad (5)$$

Si ahora al monto de caja en el año " $n + 1$ " según la fórmula (3), se suman los ingresos de este segundo período dados en la fórmula (4) y se restan las salidas de caja por concepto de pensiones calculados

en la fórmula (5), obtenemos el monto de caja pasados los primeros " $n + m + 1$ " años de inicio del proceso,

$$\begin{aligned} MC(n + 1) + ICm(n + 2, \dots, n + m + 1) - SCm(n + 2, \dots, n + m + 1) \\ = 12\left((n - \alpha)T + \frac{n(n + 1)}{2}d\right)S_j + 12nmdS_j - 12\left(mT + \frac{m(m + 1)}{2}d\right)S\alpha_j \\ = 12\left((n - m\alpha - \alpha)T + \left(\frac{n(n+1)}{2} + nm - \frac{m(m+1)}{2}\alpha\right)d\right)S_j. \end{aligned}$$

Agrupando en el factor del centro en la variable  $m$  queda,

$$MC(n + 1, \dots, n + m + 1) = 12\left(-\frac{\alpha d}{2}m^2 + \left(nd - \frac{\alpha d}{2} - \alpha T\right)m + (n - \alpha)T + \frac{n(n+1)}{2}d\right)S_j. \quad (6)$$

Se incluye ahora una fracción de pensionados que deja de cobrar pensiones por alguna causa (Posiblemente el fallecimiento); el monto que no sale de caja por este concepto  $NSCm$  puede formularse considerando que es un por ciento  $p$  dado en el rango de una tasa, por tanto, es la fracción correspondiente de la salida de caja  $SCm(n + 2, \dots, n + m + 1)$  en el periodo dado y queda como sigue,

$$\begin{aligned} NSCm &= pSCm(n + 2, \dots, n + m + 1) \\ &= p\left[12\left(mT + \frac{m(m+1)}{2}d\right)S\alpha_j\right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Como este dinero no sale de caja, debe sumarse a la cantidad de dinero que está disponible, quedando la fórmula del dinero en caja,

$$\begin{aligned} MC(1, \dots, n + m + 1) &= 12\left(-\frac{\alpha d}{2}m^2 + \left(nd - \frac{\alpha d}{2} - \alpha T\right)m + (n - \alpha)T + \frac{n(n+1)}{2}d\right)S_j + \\ &p\left[12\left(mT + \frac{m(m+1)}{2}d\right)S\alpha_j\right]. \end{aligned}$$

Agrupando en las variables  $m$  y  $m^2$  atendiendo al factor  $p$  resulta,

$$\begin{aligned} MC(1, \dots, n + m + 1) &= 12\left(-\frac{\alpha d(1-p)}{2}m^2 + \left(nd - \left(\frac{\alpha d}{2} + \alpha T\right)(1 - p)\right)m + \right. \\ &\left. (n - \alpha)T + \frac{n(n+1)}{2}d\right)S_j. \end{aligned} \quad (8)$$

Nótese que si en la fórmula (8) se considera  $m = 0$ , resulta entonces (3) que representa el proceso hasta el  $n + 1$  año. Para incrementar la fórmula (8) debe considerarse el ingreso a los fondos de caja del dinero disponible, en el sentido de que no sean utilizado en beneficios de pensiones, por lo que se supone que para inversiones se dispone de una fracción  $pi$  de todos los ingresos en los  $n + m + 1$  años implicados,

y que estas inversiones generan una fracción  $pi_g$  de ganancias; la fórmula parcial de ingresos por inversiones  $ICi$  queda,

$$ICi = pi_g\left[pi\left(12\left(nT + \frac{n(n+1)}{2}d\right)S_j + 12nmdS_j\right)\right].$$

Sumando estos ingresos a la fórmula (8), agrupando en  $m$  y en el término independiente, resulta,

$$MC(1, \dots, n + m + 1)$$

$$= 12 \left( -\frac{\alpha d(1-p)}{2} m^2 + \left( nd - \left( \frac{\alpha d}{2} + \alpha T \right) (1-p) \right) m + (n - \alpha)T + \frac{n(n+1)}{2} d \right) S_j + pig \left[ pi \left( 12 \left( nT + \frac{n(n+1)}{2} d \right) S_j + 12nmdS_j \right) \right].$$

$$MC(1, \dots, n + m + 1) = 12 \left( -\frac{\alpha d(1-p)}{2} m^2 + \left( n(1 + pig(pi))d - \left( \frac{\alpha d}{2} + \alpha T \right) (1-p) \right) m + \left( n(1 + pig(pi)) - \alpha \right) T + \frac{n(n+1)}{2} (1 + pig(pi))d \right) S_j. \quad (9)$$

Para completar la fórmula (9) se debe incorporar un fondo de capital inicial  $C_i$  aportado por la aseguradora y se deben considerar los gastos en salarios y mantenimiento de la entidad  $FS$ ; los gastos de salario y mantenimiento de la entidad, se erogan tanto en una fracción del  $C_i$  como del fondo aportado por los trabajadores con fracciones diferentes  $pc$  y  $pa$  respectivamente; para plantear las fórmula del fondo de salario y mantenimiento de la entidad, las nuevas variables introducidas serán relacionadas con las utilizadas hasta la fórmula (9), es decir, el capital inicial se considera relacionado con

el aporte realizado por los asegurados en el primer año de iniciado el fondo, es decir, el capital inicial se considera un factor  $fa$  del aporte del primer año de contribuciones de los asociados, y el valor del factor puede cumplir que  $fa \in [0;10]$  y  $C_i = (fa)12TS_j$ , los ingresos por los aportes de todos los afiliados en los  $n + m + 1$  años serían  $12 \left( nT + \frac{n(n+1)}{2} d \right) S_j$  de los  $n + 1$  primeros y  $12nmdS_j$  de los  $m$  siguientes años y los fondos y gastos de mantenimiento se calculan como sigue:

$$FS(1, \dots, n + m + 1) = (fa)12TS_j - (pc)(fa)12TS_j - (pa) \left[ 12 \left( nT + \frac{n(n+1)}{2} d \right) S_j + 12nmdS_j \right].$$

$$= 12(fa)(1 - (pc))TS_j - (pa) \left[ 12 \left( nT + \frac{n(n+1)}{2} d \right) S_j + 12nmdS_j \right].$$

Agrupando en la variable  $m$  resulta,

$$FS(1, \dots, n + m + 1) = -12(pa)nmdS_j + 12(fa)(1 - pc)TS_j - 12(pa) \left( nT + \frac{n(n+1)}{2} d \right) S_j.$$

Si el capital inicial que no es usado como salario, se invierte a la tasa de ganancia  $pig$ , los ingresos generados serían,

$$GCi(1, \dots, n + m + 1) = (pig)(1 - pc)(fa)12TS_j.$$

Sumando las dos últimas relaciones se obtiene,

$$FS(1, \dots, n + m + 1) + GCi(1, \dots, n + m + 1)$$

$$= -12(pa)nmdS_j + 12((fa)(1 - pc) + (pig)(fa)(1 - pc) - (pa)n)TS_j$$

$$- 12(pa) \left( \frac{n(n+1)}{2} d \right) S_j.$$

$$= -12(pa)nmdS_j + 12((fa)(1 - pc)(1 + pig) - (pa)n)TS_j - 12(pa) \left( \frac{n(n+1)}{2} d \right) S_j.$$

Los gastos en salario y sostenimiento de la institución  $FS$  que están presentados con signo negativo y las ganancias generadas por el capital inicial invertido  $GCi$ , deben, por tanto, sumarse a la fórmula (9) y realizar la agrupación final de la variable  $m$  en el

término que contiene el parámetro  $n$  y en el término independiente, la agrupación se efectúa en los sumandos que tienen el factor  $T$  y el factor  $d$ , resultando que el monto de caja sería en total,

$$MC(1, \dots, n + m + 1) = 12 \left[ -\frac{\alpha d(1-p)}{2} m^2 + \left( n(1 + pig(pi) - (pa))d - \left( \frac{\alpha d}{2} + \alpha T \right) (1-p) \right) m + \left( n(1 + pig(pi) - (pa)) + (fa)(1 - pc)(1 + pig) - \alpha \right) T + \frac{n(n+1)}{2} (1 + pig(pi) - (pa))d \right] S_j. \quad (10)$$

La variable capital inicial y las implicaciones de éste quedan implícitas en la fórmula (10) y anteriores, porque se representó dependiente de las aportaciones de los afiliados en el primer año de la administradora; la influencia de la fracción  $j$  de aportaciones a partir del salario, queda subordinada al factor Alpha de ésta que determina el monto de las pensiones.

Para la ejecución del modelo que representa (10), en el que la variable principal es "m" que significa la cantidad de años transcurridos a partir de que se comienza a pagar pensiones e indica que el modelo está dado por una función cuadrática en esta variable, se diseña una hoja Excel en la que se denotan cada uno de los parámetros, algunos como los denominados fracciones, se consideran en tasas entre cero y uno; otros denominados factores pueden tomar valores mayores en un rango razonable del proceso y los parámetros que indican cantidades enteras que significan número de individuos. Las tablas que se proporcionan mas adelante están diseñadas en Excel y contienen además de los datos de entrada como se indica en las columnas de la izquierda, el cálculo de los coeficientes de la expresión cuadrática en la variable "m", donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  están ordenados como coeficientes por el grado en forma descendente. Los valores críticos de las tablas indican el tiempo en años, atribuidos a la variable "m" en que el monto de caja o los fondos disponibles dejan de crecer y comienza la disminución de éstos hasta llegar al segundo punto crítico que representa el tiempo en años en el que la entidad se queda sin fondos, colapsa. Los coeficientes se diseñan en la tabla Excel, según están descritos en (10) y los puntos críticos se obtienen de diseñar en la celda respectiva el cálculo de la abscisa del punto de máximo de la función y el cero positivo de la función cuadrática modelo.

## Resultados y discusión

En la fórmula (10) se aprecia que el monto de salario medio y la fracción de aportaciones considerados, no están implicados en la condición de nulidad de este, tal condición representa el colapso del proceso en términos de que bajo las consideraciones en las que se gestiona la administradora, en un tiempo futuro es inevitable que se quede sin fondos en general, tanto del capital inicial, el aporte de los afiliados y de los ingresos por inversión del dinero; este elemento es esencial en el análisis. Las implicaciones relacionadas con la no influencia del monto medio de salario devengado, garantiza que la interpretación del modelo no dependa de la procedencia en cuanto a estratos salariales de los afiliados, independientemente de esto, el modelo colapsa, pues el crecimiento del capital de la entidad no garantiza compensar la relación entre la fracción aportada durante cierta cantidad de años, con la que se devenga como jubilación. En la **Tabla 1** en la última columna se muestra en condiciones dadas de los parámetros del modelo, el año posterior a que comienzan a jubilarse los asegurados en que los fondos comienzan a decrecer y en cuantos años se terminan.

En la significación de la efectividad del proceso considerada a través de un modelo, Baltas et al., (2021) expresaba, como resultado, el problema de la gestión óptima de los fondos de pensiones está estrechamente relacionado con el problema clásico de la selección óptima de carteras a partir de una colección disponible de activos financieros; no obstante acotaba, sin embargo, se deben tener en cuenta nuevos aspectos, como la incertidumbre del modelo relacionada con la naturaleza de la inversión de los fondos de pensiones a largo plazo, u otras causas de riesgo, como la mortalidad y la inflación.

**Tabla 1.** Indicadores de gestión en el rango de valores de los parámetros cercanos a un proceso real.

Denominación.	Datos.	CoeficientesModelo.	ValoresCríticos.
AportantesIniciales	T	500,00	DecrecMC 12,10
MediaAportantesMensuales	D	20000,00	Colapso 35,39
Años sin jubilados	N	30,00	c 7917750,00
FactorCobroPensionesSobreAportes	alpha	2,50	
FracciónJubiladosSalenSistema	P	0,20	
FracciónDisponibleAportesInversiones	Pi	0,20	
FracciónUtilidadAportesInversiones	Pig	0,25	
FracciónSalarioMantenimCapitalInicial	Pc	0,20	
FracciónSalarioMantenimAportes	Pa	0,20	
FactorcapitalInicialRespectoAportesIniciales	Fa	2,50	

Los modelos considerados por los diferentes autores, en las condiciones iniciales o en las interpretaciones, reflejan el riesgo de la funcionalidad a largo plazo, debido a diferentes causas, que pueden resumirse en la limitación de ofrecer pensiones que puedan garantizar que el pensionado se sobreponga con tales ingresos a la limitación que impone la fracción en desventaja  $\frac{DA}{DP} < 1$  y a las exigencias del modelo cambiante del costo de la vida. Esta limitación quizás no pueda ser resuelta sin montos adicionales de dinero a la gestión de las administradoras, que puedan cubrir la brecha entre el capital aportado, el generado por las inversiones y los pagos por pensiones y otros servicios que se hacen a los asegurados, que incluso puede ser por tiempo prolongado para al menos una fracción de los jubilados.

Sobre los sistemas de pensiones se afirma, mostramos que los ajustes necesarios para asegurar la sostenibilidad de los sistemas previsionales mixtos son menos severos que los del sistema de reparto basado en beneficios definidos puro, pero la tasa de reemplazo total para los primeros es menor en la mayoría de los casos estudiados. Al calcular la rentabilidad que recibirían los individuos, demostramos que algunas cohortes están en mejor situación con un sistema previsional mixto. (Boado-Penas et al., 2019)

La formulación del modelo no depende de si es una administradora privada, mixta o estatal, si esta última se considera con los mismos estándares, es decir, si no realiza aportes ingentes y sistemáticos, la sostenibilidad es también cuestionable. La **Tabla 1** muestra resultados asociados a un capital inicial que es dos veces y media superior al aporte de los afiliados en el

primer año de funcionamiento  $fa = 2,5$ ; la realidad de algunas instituciones de este tipo de carácter mixto es la dependencia de los aportes estatales para mantener la estabilidad. Las administradoras también usualmente prestan otros servicios a los afiliados y pensionados que constituyen erogaciones de dinero no consideradas en el modelo, no obstante, pueden incluirse utilizando un mayor valor en el factor de cobro pensiones  $\alpha$ , y quedaría incluido en los gastos de la institución, a los efectos cuantitativos no es necesario separar explícitamente cada rubro.

Para el caso de administradoras con capital privado, incluyen las ganancias de los inversionistas que no ingresan a la institución, una posibilidad de tener estos valores en cuenta es interpretar la tasa  $pig$  como la que considera solo la parte que ingresa a los fondos de la administradora. Acerca del modelo también es oportuno destacar que pueden suponerse distintos el flujo de personas que ingresa o que pasa a jubilación, incluso cada año.

Finalmente se consideran situaciones extremas a favor de la eficiencia del modelo, no obstante, solo prolongan el tiempo en que se terminan los fondos. En similares condiciones a las consideradas en la **Tabla 1** para obtener los valores de tiempo de decrecimiento y colapso de los fondos, cambiando solo la fracción de pensionados que salen del sistema, al nivel del cincuenta por ciento, se aprecia comparando los valores de la última columna con los respectivos en la **Tabla 2**, lo que se afirma antes, extendiendo los tiempos de interés aproximadamente en un 60 % y un 44 %.

Relacionado con la extensión de los tiempos, expresado al final del párrafo anterior, se afirma, una mejor solución para ese problema sería reducir la tasa

**Tabla 2.** Indicadores de gestión en el rango de valores de los parámetros considerando una situación ideal en la que se supone un valor atípico del parámetro  $p$ .

Elementos del modelo de las AFP.						
Denominación.	Datos.	CoeficientesModelo.		ValoresCríticos.		
AportantesIniciales	T	500,00	a	-12500,00	DecrecMC	19,38
MediaAportantesMensuales	D	20000,00	b	484375,00	Colapso	51,14
Años sin jubilados	N	30,00	c	7917750,00		
FactorCobroPensionesSobreAportes	Alpha	2,50				
FracciónJubiladosSalenSistema	P	0,50				
FracciónDisponibleAportesInversiones	Pi	0,20				
FracciónUtilidadAportesInversiones	pig	0,25				
FracciónSalarioMantenimCapitalInicial	Pc	0,20				
FracciónSalarioMantenimAportes	Pa	0,20				
FactorcapitalInicialRespectoAportesIniciales	Fa	2,50				

de retiros de 1,5 a 2 puntos porcentuales por debajo del rendimiento esperado. Ambas soluciones darían como resultado retiros más bajos en los primeros años, pero este efecto puede revertirse con el tiempo, especialmente con una tasa de retiros más baja, porque entonces se permite que el fondo crezca más rápido. (Mork et al., 2022)

Una cuestión que se evidencia en las investigaciones realizadas por los diferentes autores donde se destaca que, el crecimiento de los diferentes fondos basado en los ingresos reportados por las inversiones que se realizan con capital proveniente de las aportaciones u otros, no son suficientemente amplias y rápidas en alcanzarse en el tiempo en que una cohorte de contribuyentes aporta y comienza entonces el tiempo de cobro de jubilación; en otro sentido, no crece con adecuada rapidez el dinero en correspondencia con la relación a la que tienen la masa de aportantes, que en el tiempo tiende a ser decreciente, con la masa de pensionados que puede ser creciente con respecto a la primera, por tanto, la administradora de fondos puede incurrir en un estado de carencia de recursos financieros y colapso.

Considerando ahora que la fracción de los fondos destinados a la inversión y que la fracción de utilidades por las inversiones de ese capital es del 50 %, que puede ser una opción viable dentro de la administradora, se obtienen resultados similares, aunque inferiores en cuanto a la prolongación del tiempo en que comienza el descenso de los fondos hasta llegar a un nivel de fondos cero. La **Tabla 3**, muestra estos resultados.

Los casos atípicos calculados en las **Tablas 2 y 3**, representan situaciones que no son sostenibles en el tiempo, porque no representan cuantitativamente lo que ocurre en el proceso real, es una idealización que indica en esas condiciones la no sostenibilidad en el tiempo de este tipo de proceso, explicado básicamente, porque se devengan pensiones por cifras superiores a las que se aportan y que el capital invertido no genera ganancias suficientes que compensen la relación entre los aportes y las pensiones; no obstante una inversión sostenida del capital con ingresos abultados, puede contribuir a la extensión de la duración en condiciones adecuadas de estos procesos.

El cuestionamiento siguiente es esencial y se ubica en el centro del análisis, se cuestiona el concepto de sostenibilidad de los sistemas de pensiones profesionales europeos como vehículo eficaz para garantizar derechos de pensión adecuados a todos los trabajadores y evitar la pobreza en la vejez. (Autenne, A., Degoli, MC, y Hartmann-Cortés, K., 2021)

Como una tendencia positiva para enfrentar la sostenibilidad de las pensiones se apunta, en la actualidad, el desafío de la sostenibilidad del sistema de pensiones se ha convertido en el punto clave de la reforma del sistema de seguridad social para los gobiernos de todo el mundo. Con el desarrollo de prácticas en varios países, la connotación de la sostenibilidad de las pensiones se ha enriquecido y desarrollado. (Zhao, Q., y Mi, H., 2019)

La versión desarrollada es la más simple, atendiendo a la cercanía con la estructura del interés simple, pero

**Tabla 3.** Indicadores de gestión en el rango de valores de los parámetros considerando una situación ideal en la que se suponen valores factibles de los parámetros  $p_i$  y  $p_{ig}$ .

Elementos del modelo de las AFP.					
Denominación.	Datos.		Coeficientes Modelo.		Valores Críticos.
Aportantes Iniciales	T	500,00	a	-20000,00	DecrecMC <b>15,10</b>
Media Aportantes Mensuales	D	20000,00	b	604000,00	Colapso <b>41,88</b>
Años sin jubilados	N	30,00	c	9781000,00	
Factor Cobro Pensiones Sobre Aportes	alpha	2,50			
Fracción Jubilados Salen Sistema	P	0,20			
Fracción Disponible Aportes Inversiones	$p_i$	0,50			
Fracción Utilidad Aportes Inversiones	$p_{ig}$	0,50			
Fracción Salario Mantenim Capital Inicial	$p_c$	0,20			
Fracción Salario Mantenim Aportes	$p_a$	0,20			
Factor Capital Inicial Respecto Aportes Iniciales	$f_a$	2,50			

puede ser ampliada si no se consideran las variables medias de los flujos de aportantes, pensionados e ingresos por el capital invertido; esta posibilidad complejizaría la expresión del modelo, pues consiste en disgregar el cálculo asociado a cada año individualmente, que daría lugar a un modelo oscilante, no simétrico como el encontrado en la fórmula (10) y que no evitaría que se produzca el colapso financiero o fin de los fondos.

Es posible hacer un análisis de la relación entre las variables que representan los años que transcurren sin pagar pensiones “*n*” y los que suceden hasta que se ha iniciado el pago de pensiones “*m*”, hasta que colapsa la entidad; una representación gráfica se puede obtener si se prefijan el resto de los parámetros. Además, es posible realizar un pesquizaje estadístico que permita encontrar valores medios esperados, para los tiempos de inicio de decrecimiento y colapso de los fondos de la entidad.

Debe señalarse que el modelo puede ampliarse con un supuesto adicional consistente en, incorporar de forma sistemática, por trienios, lustros u otros períodos con fines determinados dentro del proceso que, en administradoras mixtas, pueden provenir del estado y que pudieran sostener el proceso en el tiempo.

Es oportuno significar que según se consideren de forma ponderada algunos parámetros como la fracción de utilidades por el dinero invertido o que aumente la fracción de pensionados que salen del sistema por alguna causa, se consigue aumentar los tiempos críticos, igual sucedería si se ponderan favorablemente otros parámetros; no obstante, el colapso es inevitable, pues está condicionado, por la tendencia social relacionada con el desarrollo, que conduce a que los flujos de aportantes, que en principio deben ser mayor y los flujos de pensionados, tiendan en el tiempo a igualarse, esto se considera en la elaboración del modelo.

## Conclusiones

El principal resultado que refleja el análisis hecho, se refiere a la imposibilidad de sostener a largo plazo, el funcionamiento de una Administradora de Fondos de Pensiones, pues las aportaciones y los ingresos de capital por diferentes vías, no garantizan por las características propias de estos procesos, que se compensen los ingresos a la entidad, con las salidas de dinero a la que está sometida, tanto por pago de pensiones, otros servicios y los gastos de mantenimiento físico y salario de los trabajadores, incluso si se consideran las mejores condiciones para parámetros como capital destinado a inversiones, ganancia del capital invertido y se supone el caso fatídico de que un alto porcentaje de jubilados se excluya del cobro

de pensiones, solo se consigue trasladar en el tiempo el momento del quiebre. Una posibilidad de compensar esta circunstancia es completar los fondos de las administradoras con ingresos sistemáticos de capital por parte del estado, provenientes de los recursos que se generan en otros sectores, mediante los impuestos.

## Contribución de los autores

Conceptualización, Acosta, Iglesias – Luna, Murillo; metodología, Acosta, Iglesias; software (Esquema de cálculo en hoja Excel), Acosta, Iglesias; validación, Acosta, Iglesias; análisis formal, Gutiérrez, De León; investigación, Acosta, Iglesias – Luna, Murillo - Gutiérrez, De León; redacción y preparación del borrador original Acosta, Iglesias; redacción, revisión y edición Gutiérrez, De León; visualización, Luna, Murillo. Todos los autores han leído y aceptado la versión publicada del documento.

## Fuente de financiamiento

Esta investigación no recibió financiamiento externo.

## Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener ningún conflicto de intereses.

## Referencias

1. Artzrouni, M. (2009). The mathematics of Ponzi schemes. *Mathematical Social Sciences*, 58 190–201. journal homepage: [www.elsevier.com/locate/econbase](http://www.elsevier.com/locate/econbase)
2. Autenne, A., Degoli, MC, y Hartmann-Cortés, K. (2021). Introducción al número especial sobre pensiones sostenibles: ¿Las pensiones sostenibles requieren inversiones sostenibles? *European Journal of Social Security*, 23 , 191-199. <https://doi.org/10.1177/13882627211038965>
3. Bairoliya, N. (2019). Heterogeneidad de los planes de pensiones y comportamiento de la jubilación. *European Economic Review*. <https://doi.org/10.1016/J.EUROECO.REV.2019.03.005>
4. Baltas, I., Dopierała, L., Kołodziejczyk, K., Szczepański, M., Weber, G. y Yannacopoulos, AN (2021). Óptima gestión de los fondos de pensiones de aportación definida bajo el efecto de la inflación, la mortalidad y la incertidumbre. *euros. J. Ópera. Res.*, 298 , 1162-1174. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2021.08.038>
5. Boado-Penas, MC, Godínez-Olivares, H., Haberman, S., y Serrano, P. (2019). Mecanismos automáticos de balance para sistemas mixtos de pensiones bajo diferentes estrategias de inversión. *The European Journal of Finance*, 26, 277 -294. <https://doi.org/10.1080/1351847X.2019.1647260>
6. Ebbinghaus, B. (2021). Desigualdades y riesgos de pobreza en la vejez en Europa: el efecto renta de doble filo de los sistemas de pensiones. *Política social y administración*. <https://doi.org/10.1111/SPOL.12683>
7. Mayorga Zambrano, J. (2021). Un modelo matemático para esquemas piramidales tipo Ponzi. *Analítica. Revista de Análisis Estadístico*. ISSN 1390-6208, e-ISSN 1390-7867, 1 (2011), Vol. 1 (1): 119-129.

8. Mork, KA, Trønnnes, HA y Bjerketvedt, VS (2022). Preservación de capital y gasto corriente con fondos soberanos y fondos de dotación: un estudio de simulación. *Revista internacional de estudios financieros*. <https://doi.org/10.3390/ijfs10030067>
9. Owadally, I., Mwizere, J., Kalidas, N., Murugesu, K. y Kashif, M. (2021). Inversión sostenible a largo plazo para la jubilación. *Sustainability*, 13 , 5000. <https://doi.org/10.3390/SU13095000>
10. Palacios R. & Whitehouse E. (1999), "Role of Choice in the Transition to a Funded Pension System" Pension Reform Primer Series, The World Bank, Washington DC.
11. Palma, N. (2021). Los efectos reales de las expansiones monetarias: evidencia de un experimento histórico a gran escala. *The Review of Economic Studies*. <https://doi.org/10.1093/restud%2Frdab042>
12. Teague, FN (2022). Comedia y crisis: Pieter Langendijk, los holandeses y las burbujas especulativas de 1720, de Joyce Goggin y Frans De Bruyn (reseña). *Drama comparativo*, 56 , 350-352. <https://doi.org/10.1353/cdr.2022.0019>
13. Zhao, Q., y Mi, H. (2019). Evaluación de la sostenibilidad del sistema público de pensiones urbanas en China. *Sustentabilidad*. <https://doi.org/10.3390/SU11051418>